Opravný zápočtový test z PST

25.5.2015

T1 Šlechticovi bude chutnat podané mléko s pravděpodobností 0.25, pokud bude kravské, 0.9 pokud bude kozí a 0.4, pokud bude koňské. Na farmě máme 15 koz, 25 krav a 10 koní, všechna zvířata kojná. Náhodně vybereme kus a vezmeme mléko pro šlechtice. Jaká je pravděpodobnost, že šlechtici bude mléko chutnat?

T2 Spojitě rozdělená náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(u) = e^{-c|u|}, \; u \in \mathbb{R}.$$

Určete konstantu c a pravděpodobnosti $\mathbf{P}(X \leq 0)$, $\mathbf{P}(-1 \leq X \leq 1)$, $\mathbf{P}(X > \ln 3)$ a $\mathbf{P}(X = 1)$.

T3 Náhodně vybereme číslo a z intervalu $[0, 5]$ (předpokládáme rovnoměrné rozdělení). Jaký je průměrný obsah rovnostranného trojúhelníka se stranou a?

Náznak řešení a výsledky

T1 Označme po řadě $+, C, G, H$ jevy označující, že šlechtici donesené mléko chutná, že jsme vybrali z farmy krávu, kozu, resp. koně. Potom platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(+|C) = 0.25, &\quad \mathbf{P}(C) = 0.5\\
\mathbf{P}(+|G) = 0.9, &\quad \mathbf{P}(G) = 0.3\\
\mathbf{P}(+|H) = 0.4, &\quad \mathbf{P}(H) = 0.2
\end{aligned}$$

Věta o úplné pravděpodobnosti nám dává

$$\mathbf{P}(+) = \mathbf{P}(+|C) \cdot \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(+|G) \cdot \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(+|H) \cdot \mathbf{P}(H) = 0.475.$$

T2 Neboť f_X je sudá, máme

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|u|} \, \mathrm{d}u = 2 \int_0^{\infty} e^{-cu} \, \mathrm{d}u = 2 \left[\frac{e^{-cu}}{-c} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{c},$$

za (rozumného) předpokladu, že $c > 0$. Porovnáním pravé a levé strany vyjde $c = 2$. Dále máme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}, \text{ (hustota je sudá)},\\
&\mathbf{P}(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^{1} e^{-2|u|} \, \mathrm{d}u = 2 \int_0^1 e^{-2u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{e^{-2u}}{-2} \right]_0^1 = 1 - e^{-2},\\
&\mathbf{P}(X > \ln 3) = \int_{\ln 3}^{\infty} e^{-2u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{e^{-2u}}{-2} \right]_{\ln 3}^{\infty} = \frac{1}{18},\\
&\mathbf{P}(X = 1) = 0, \text{ (X je spojitě rozdělená)}.
\end{aligned}$$

T3 Hustota veličiny a je rovna

$$f_a(u) = \begin{cases} \frac{1}{5} & u \in [0, 5] \\ 0 & u \notin [0, 5] \end{cases}$$

a obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a je z Pythagorovy věty roven $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Proto je

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}u^2}{4} f_a(u) \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{20} \int_0^5 u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{20} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^5 = \frac{25\sqrt{3}}{12}.$$